

Rappel : Exemple 3.53 (ii) suite

$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k (t-1)^k$. Pour quels $t \in \mathbb{R}$ la série converge?

d'Alembert, limsup (aka Cauchy) $\Rightarrow$ la série converge absolument
pour $t \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
& la série diverge pour
 $t \in]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$.

$$\rho = 2|t-1|$$

Reste à voir ce qui se passe pour

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad t = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{1}{2} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \cancel{2^k} (-1)^k \cdot \frac{1}{\cancel{2^k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k.$$

qui diverge car $(-1)^k \not\rightarrow 0$

$$\boxed{t = \frac{3}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{3}{2} - 1\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1$$

qui diverge, car

$$1 \not\rightarrow 0$$

Conclusion: la série converge si et seulement si $t \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
§ 3.7 Suites définies par récurrence

Définition 3.54 (suite définie par récurrence)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Une suite définie par récurrence est une suite de la forme

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \quad \forall n \geq 0. \quad \begin{matrix} x_0 = a, x_1 = f(x_0) = f(a), \\ x_2 = f(x_1) = f(f(a)), \dots \end{matrix}$$

Remarque 3.55

- (i) On va faire beaucoup de démos par récurrence sur ces suites.
- (ii) Si f est suffisamment gentille (f continue, on verra plus tard)

et si (x_n) converge la limite est solution de

$$l = f(l)$$

$$x_{n+1} = f(x_n) \leadsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Dans ce cours

2

(iii) Généralement, il y a ~~3~~ stratégies pour étudier les suites définies par récurrence.

1- trouver une formule "close" $x_n = g(n)$

2- on montre que (x_n) est monotone bornée

~~3- On montre que (x_n) est une suite de Cauchy~~

Exemple 3.56 : (Cas f affine)

Soient $a, m, h \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = mx + h. \text{ On a alors,}$$

$$x_0 = a, \quad x_1 = f(a) = m \cdot a + h, \quad x_2 = f(x_1) = m^2 \cdot a + m \cdot h + h$$

$$x_3 = f(x_2) = \underbrace{m^3 \cdot a} + \underbrace{m^2 \cdot h + m \cdot h + h}_{h(1+m+m^2)}$$

↳ On devine

$$x_n = m^n \cdot a + h \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} m^k}_{\text{si } m \neq 1, \frac{1-m^n}{1-m}}$$

$$\text{si } m \neq 1, \quad \frac{1-m^n}{1-m}$$

$$\Rightarrow x_n = \begin{cases} a + n \cdot h & \text{si } m = 1 \\ x_n = m^n \cdot a + \frac{1-m^n}{1-m} \cdot h & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$

(On peut démontrer cette formule par récurrence)

$\Rightarrow$ Si $|m| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{m^n}_0 \cdot a + \underbrace{\frac{1-m^{n+1}}{1-m}}_{\rightarrow \frac{1}{1-m}} \cdot h = \frac{1}{1-m} \cdot h.$$

On aurait aussi pu trouver la limite en résolvant
 $l = f(l) = m \cdot l + h \Leftrightarrow l = \frac{h}{1-m}.$

Si $|m| \geq 1$: (x_n) converge si et seulement si elle est constante.

Plan:

1- Écrire quelques termes de la suite, et deviner/conjecturer que la suite est croissante ou décroissante.

2- deviner l (en résolvant $l = f(l)$)

3- Si on a conjecturé croissance, on montre que $\forall n, x_0 \leq x_n \leq l$
— " — décroissance, on montre que $\forall n, l \leq x_n \leq x_0$
PAR RECURRENCE

4 - On montre que (x_n) est monotone.

Exemple 3.57

Soit la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n^2 \end{cases} \quad \forall n \geq 0$$

1 - $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{16}$, Conj: $x_n \downarrow$

2 - $l = f(l) \Leftrightarrow l = l^2 \Leftrightarrow l = 0$ ou $l = 1$ ~~ou~~ une suite qui commence à $\frac{1}{2}$ et décroît ne peut pas converger vers 1.

3 - Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$

Accrueil : $u=0$

Si $u=0$, $x_u = x_0 = \frac{1}{2}$. Donc, $0 \leq x_u \leq \frac{1}{2}$ se lit $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ qui est vrai ✓

Pas de récurrence supposons que $0 \leq x_u \leq \frac{1}{2}$. (H.R.)

Et montrons que $0 \leq x_{u+1} \leq \frac{1}{2}$.

$$x_{u+1} = x_u^2 \geq 0$$

$$x_{u+1} = x_u^2 \stackrel{\text{H.R.}}{\leq} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}, \text{ qui est le résultat voulu.}$$

$\uparrow$
 $x_u \leq \frac{1}{2}$

$\nwarrow$ x_1

4 - Soit $u \in \mathbb{N}$ quelconque.

$$x_{u+1} - x_u = x_u^2 - x_u = x_u(x_u - 1) \leq 0$$

$\uparrow$
 $x_u \in [0, \frac{1}{2}]$

$$x(x-1) \geq 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1$$
$$\leq 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

$\Rightarrow (x_n)$ converge vers 0.

Chapitre 4 : Fonctions réelles

§4.1. Bornes, monotonie, parité et périodicité

Définition 4.1

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que

(i) f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in D, f(x) \leq M$.

$\Rightarrow$ $\text{Im}(f)$ est majoré

On note alors, $\sup_{x \in D} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in D \}$

(ii) f est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in D, f(x) \geq m$

$\Rightarrow$ $\text{Im}(f)$ est minoré

On note alors $\inf_{x \in D} f(x) = \inf \{ f(x) : x \in D \}$

(iii) f est bornée si elle est minorée et majorée, ce qui équivaut à, $\exists C \geq 0$ tq $\forall x \in D, |f(x)| \leq C$.

(iv) f est croissante si $\forall x, y \in D$ tq $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$

⚠️ montrer $f(x+1) - f(x) \geq 0$ ne montre pas que f est croissante.

(v) f est décroissante si $\forall x, y \in D$ tq $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$

(vi) f est strictement croissante si $\forall x, y \in D$ tq $x < y$ on a $f(x) < f(y)$

(vii) f est strictement décroissante si $\forall x, y \in D$ tq $x < y$, on a $f(x) > f(y)$

(viii) f est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

(ix) f est périodique si $\exists T > 0$ tq $\forall x \in D$ tq $x+T \in D$ on a $f(x+T) = f(x)$. On dit aussi que f est T -périodique

Définition 4.3 (Fonction paire, fonction impaire)

(i) Un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}$ est symétrique (par rapport à 0) si $\forall x \in D, -x \in D$

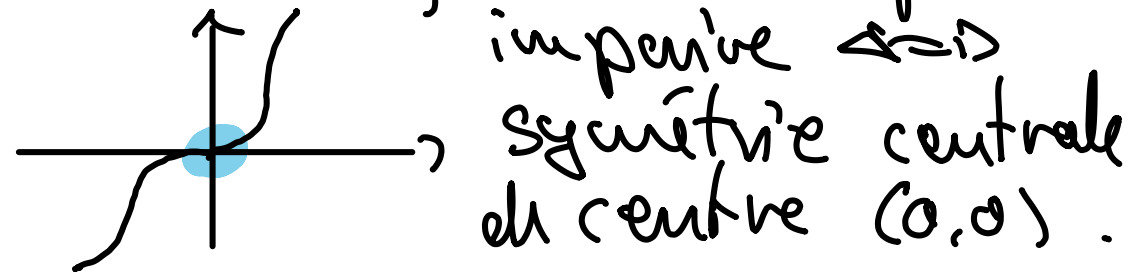
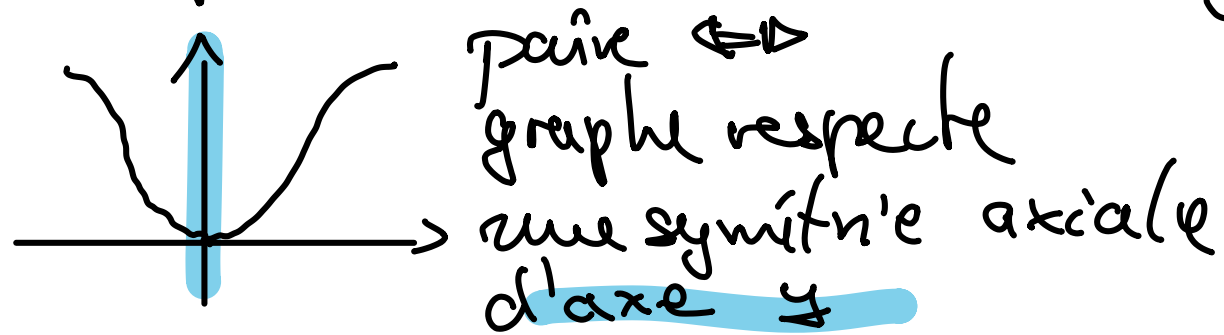
(ii) Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble symétrique, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que

(a) f est paire si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$

(b) f est impaire si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$

Remarque 4.4:

(i) On peut déterminer sur le graphique d'une fonction sa parité



(ii) Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble symétrique, et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Définissons $p, q: D \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Alors, p est paire, q est impaire et $f = p + q$.

On appelle alors p la partie paire de f et q la partie impaire de f .

Exemples 4.5:

(i) Les fonctions $x, x^3, \sin(x), \operatorname{arcsin}(x), \tan(x), \operatorname{arctan}(x)$ et $\frac{1}{x}$ sont impaires. Les fonctions $x^2, \cos(x)$ sont paires.

Les fonctions $e^x, \log(x), \operatorname{arccos}(x)$ sont ni l'un ni l'autre.

(ii) La partie paire de l'exponentielle, est le cosinus hyperbolique

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La partie impaire de l'exponentielle est le sinus hyper-
bolique.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Proposition 4.6 : Série 8 ex 8.

Proposition 4.7 :

Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T_f -périodique, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$
une fonction T_g -périodique, et $h: f(D) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors,

(i) si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$, $f+g$ et $f \cdot g$ sont périodiques.

(ii) $h \circ f$ est T_f -périodique.

Exemple 4.8

(ii) Soit $\chi_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

la caractéristique des rationnels.



Alors, $\forall T > 0$, $T \in \mathbb{Q}$, $X_{\mathbb{Q}}$ est T -périodique.

$X_{\mathbb{Q}}$ n'a pas de plus petite période, malgré le fait qu'elle n'est pas constante.